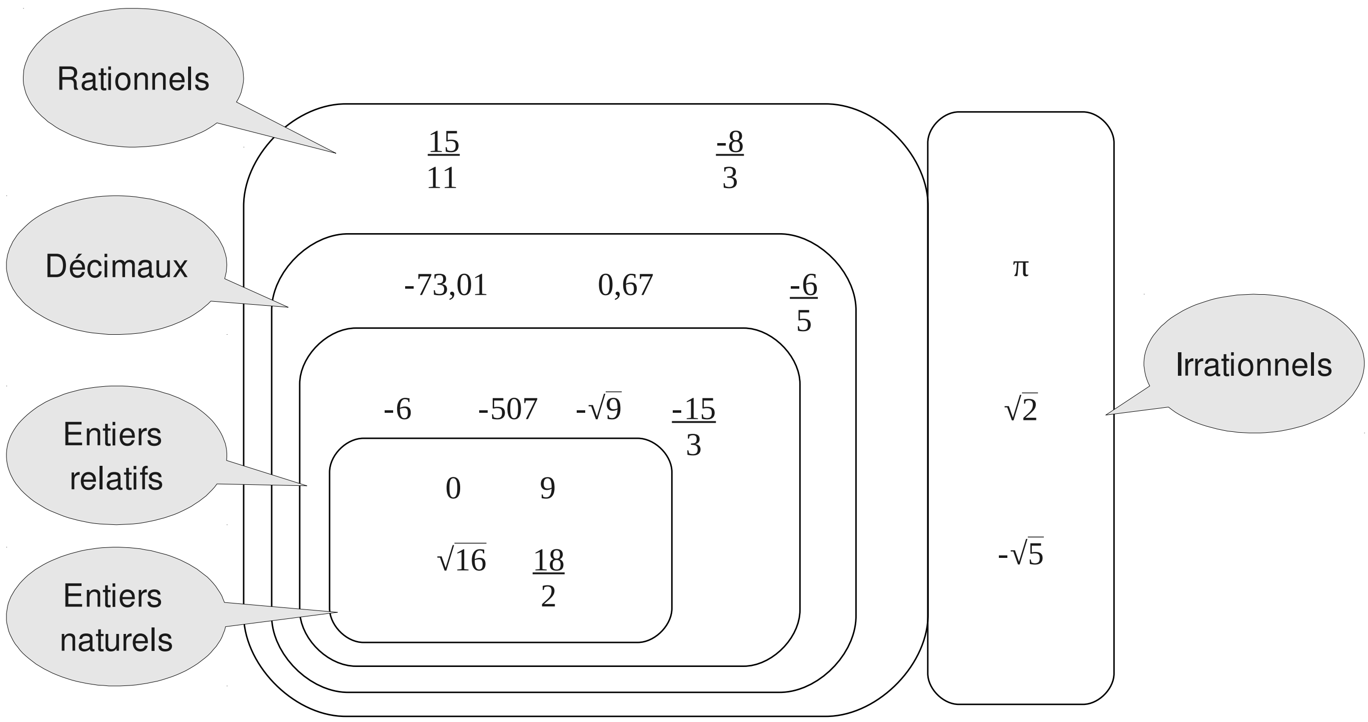
Chapitre 1 : Le PGCD de deux entiers

Socle :
→ Déterminer tous les diviseurs d'un nombre entier
→ Calculer le PGCD de 2 nombres entiers
→ *Connaître et utiliser un algorithme du PGCD*
→ *Déterminer si 2 nombres entiers sont premiers entre eux*
→ Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

I. Les différents types de nombres

Définitions :
- Les nombres **entiers naturels** sont les nombres positifs dont la partie décimale est nulle (Ex : 0, 1, 2, 3, 4...)
- Les nombres **entiers relatifs** sont les nombres entiers positifs ou négatifs (Ex : -7 ; 6 ; -13 ; 0...)
- Les **nombres décimaux** sont les nombres qui peuvent s'écrire avec une virgule.
  Remarque importante : la partie décimale peut être **nulle** mais pas **infinie** !
  (5,7 ; -982,4 ; 45 = 45,0 ; 0,5...)
- Les **nombres rationnels** sont des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une **fraction**
  (Ex : $\frac{4}{3}$; 1,029 = $\frac{1029}{1000}$; 9 = $\frac{9}{1}$; -1,5 = $-\frac{3}{2}$ ...)
- Les **nombres irrationnels** sont les nombres qui **ne peuvent pas** se mettre sous forme de **fraction** ($\sqrt{3}$; π ...)



II. Diviseurs et multiples

Définition (rappel)
(a et b sont entiers et $b \neq 0$)
Effectuer la division euclidienne de a par b signifie trouver le **quotient entier** q et le **reste** r tel que
$a = b \times q + r$ et $r < b$

Exemple :
Division euclidienne de 153 par 28.
153 = 5 x 28 + 13 et 13 < 28
Donc, dans la division euclidienne de 153 par 28, le quotient entier est 5 et le reste 13.

Avec la Calculatrice :
Pour effectuer une division euclidienne, on peut utiliser les touches $\boxed{\div R}$ ou $\boxed{\urcorner}$

Définition :
a et b désignent deux nombres entiers positifs ($b \neq 0$)
lorsque la division euclidienne de a par b donne un reste nul, on dit que :
- b est un **diviseur de** a ; ou b **divise** a ;
- a est un **multiple de** b ; ou a est **divisible par** b.

Exemple :
$56 = 7 \times 8$ donc 7 et 8 sont des diviseurs de 56
56 est un multiple de 8
56 est divisible par 7 et 8
7 divise 56

Définition :
Un nombre entier est dit **premier**,
si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Exemple :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 … sont des nombres premiers

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

On élimine les multiples de 2 ; puis ceux de 3 ; puis ceux de 5... Les nombres qui restent sont premiers. →

Crible d'Eratosthène

~~0~~	~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59
~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79
~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89
~~90~~	~~91~~	~~92~~	93	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~

III. Diviseurs Communs

1) PGCD

Définition :
a et b désignent deux nombres entiers positifs ($b \neq 0$)
Le **plus grand diviseur commun** aux nombres a et b s'appelle le **PGCD** (Plus Grand Commun Diviseur). On le note PGCD (a ; b).

Exemple :
Les diviseurs de 30 sont : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30.
Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18.
Donc, les diviseurs communs à 30 et 18 sont : 1, 2, 3 et 6.
Donc, PGCD (18 ; 30) = 6.

Remarque :
1 est un diviseur de tous les nombres entiers. Donc, le plus petit PGCD possible est 1.

Définition :
On dit que deux nombres entiers sont **premiers entre eux** si leur PGCD est 1.

Exemple :
24 et 35 sont premiers entre eux car le seul diviseur commun de ces deux nombres est 1.

Propriétés :
PGCD (a ; a) = a ;
PGCD (b ; a) = PGCD (a ; b) ;
Si a est un multiple de b, alors PGCD (a ; b) = b.

2) Méthodes de calculs

Act 4 p 53 (méthode des soustractions successives)

Propriété :
PGCD (a ; b) = PGCD (b ; a – b)

Exemple :
PGCD de 30 et 72 :

72 – 30 = 42
42 – 30 = 12
30 – 12 = 18
18 – 12 = 6
12 – 6 = 6 ← PGCD (30 ; 72) = 6
6 – 6 = 0

Activité 4 (algorithme d'Euclide)

Propriété : a = q x b + r
On a alors : PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)

Exemple :

PGCD de 544 et 320 :

544 = 1 x 320 + 224
320 = 1 x 224 + 96
224 = 2 x 96 + 32 ← PGCD (544 ; 320) = 32
96 = 3 x 32 + 0

IV. Fractions irréductibles

Définition :
Une fraction est dite **irréductible** si elle ne peut plus être simplifiée.

Exemple :

$\frac{2}{3}$; $\frac{11}{35}$ …

Activité 7 p 54

Propriété :
Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, alors la fraction est irréductible.

Méthode :
Pour rendre une fraction irréductible, il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Exemple :

Rendre la fraction $\frac{203}{870}$ irréductible.

PGCD (203 ; 870) = 29 donc, $\frac{203}{870}=\frac{29\times7}{29\times30}=\frac{7}{30}$

Différents types de nombres – Exercices

Voici une liste de nombres, quel est le plus petit ensemble auquel chacun d'eux appartient ?
(entiers naturels, entiers relatifs, décimaux, rationnels ou irrationnels)

-27,2 / 37 / $\frac{1}{7}$ / -15 / $\sqrt{3}$ / $\frac{1\,307}{100}$ / $\frac{-10}{5}$ / $-\pi$ / $\sqrt{4}$ / $\frac{-5}{15}$ / $\frac{20}{4}$ / $\frac{1}{8}$ / $-\sqrt{49}$